

Ficha Nº 01
LIMITE E CONTINUIDADE DE FUNÇÕES
Cursos: Engenharias

Nível: I

Disciplina: Análise Matemática I

Semestre: 2º/2023

Docentes: Grupo de disciplina

Carga Horária: 6h/Semana

Duração: Três semanas (29/07 - 17/08/2024)

1. Determine os seguintes limites

$$\begin{array}{llll}
 \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x}{x-5} & \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-x}{(x-1)^2} & \text{(e)} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-1}{x^2(x+2)} & \text{(g)} \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^-} \sec(x) \\
 \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x}{x-5} & \text{(d)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x^2(x+2)} & \text{(f)} \lim_{x \rightarrow \pi^-} \cos \sec(x) & \text{(h)} \lim_{x \rightarrow 5^+} \ln(x-5)
 \end{array}$$

 2. Dado que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = -27$, encontre, se existir, o limite. Caso não exista, explique por quê.

$$\begin{array}{llll}
 \text{(a)} \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] & \text{(c)} \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{h(x)} & \text{(e)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{h(x)} & \text{(g)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} \\
 \text{(b)} \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^2 & \text{(d)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} & \text{(f)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} & \text{(h)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{2f(x)}{h(x) - f(x)}
 \end{array}$$

3. Calcule os seguintes limites, se existir

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \lim_{x \rightarrow -7} (2x + 5) & \text{(g)} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2x-4}{x^3+2x^2} & \text{(m)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-10x^2+28x-24} \\
 \text{(b)} \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2}{5-x^2} & \text{(h)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{x^3-1} & \text{(n)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-4x^2+5x-2} \\
 \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\sqrt{3x+1}+1} & \text{(i)} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2+4x+3} & \text{(o)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-8x^2+21x-18} \\
 \text{(d)} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2-25} & \text{(j)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-13x^2+51x-63}{x^3-4x^2-3x+18} & \text{(p)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-x^2-5x-3}{x^3+6x^2+9x+4} \\
 \text{(e)} \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2+3x-10}{x+5} & \text{(k)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x^2+2x-2}{x^3+3x^2-4x} & \text{(q)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+x^2+x+1}{x^4+x^2-2} \\
 \text{(f)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-1} & \text{(l)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-3x^2+x-2}{x^3-x-6} &
 \end{array}$$

4. Calcule os seguintes limites no infinito

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+x^2-4}{2x^3+x+11} & \text{(f)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+3)(x+4)(x+5)}{x^4+x-11} & \text{(k)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} \\
 \text{(b)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+2x-1}{x^3-x+2} & \text{(g)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{2x+1} \right) & \text{(l)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+2x-x^2}{1-x+2x^2} \\
 \text{(c)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+9}}{x+3} & \text{(h)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^{100}(6x+1)^{200}}{(3x+5)^{300}} & \text{(m)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3-x^2+2}{2x^3+x-3} \\
 \text{(d)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+x^4-1}{2x^5+x-x^2} & \text{(i)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^5} + \sqrt[5]{x^3} + \sqrt[6]{x^8}}{\sqrt[3]{x^4+2}} & \text{(n)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x^3-x) \\
 \text{(e)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)^2}{\sqrt[3]{x^6+1}} & \text{(j)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(2x+1)(3x-2)}{2x^2(5x-8)(x+6)} & \text{(o)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-9}}{2x-6} \\
 & & \text{(p)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+5}{x-4}
 \end{array}$$

$$(q) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x - x^2}{2x - 7}$$

$$(r) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 5x}{2x^3 - x^2 + 4}$$

$$(s) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{x^3 + x^2 - 1}$$

$$(t) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 + 5}{(x^2 - 2)(2x^2 - 1)}$$

$$(u) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x^3 + x^5}{1 - x^2 + x^4}$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x^2 - x^4)$$

5. Calcule os seguintes limites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 1}{3x}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x - 1} - 2}{x^2 - 25}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 6} - 3}{\sqrt{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{27 - \sqrt{x^3}}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x} - \sqrt[3]{1 - x}}{x}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x - 2} - \sqrt{x})$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}{x}$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + 5} - \sqrt{5}}{\sqrt{x} - 5}$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - \sqrt{x^2 - 9}}{6x}$$

$$(m) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x - 1} - 2x}{x - 7}$$

$$(n) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + x} - x}$$

$$(o) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^2 + 1} - x}$$

$$(p) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x^3}}{\sqrt[4]{x^5} + x\sqrt{x}}$$

$$(q) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^2 + 1}}{2\sqrt[4]{x^4 + 1} - \sqrt[5]{x^4 + 1}}$$

$$(r) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) [\ln(x + 1) - \ln x]$$

$$(s) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + x} - 3x)$$

$$(t) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x^2 + 2x})$$

$$(u) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx})$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 4} - x)$$

$$(w) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 4} - \sqrt{x - 2})$$

6. Calcule os seguintes limites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{2x+6}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{7}{3x}\right)^{x-1}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+6}{x+5}\right)^x$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-3}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{7x+10}{1+7x}\right)^{\frac{x}{3}}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^x$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{6+4x}{2+4x}\right)^{3-2x}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+5}{x+4}\right)^{2x-1}$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{3x}$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{5-4x}$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$$

$$(m) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x}$$

$$(n) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-5}{2x-2}\right)^{4x^2}$$

$$(o) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+6}{3x-1}\right)^{x^2}$$

$$(p) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+2x+2}{x^2+3}\right)^x$$

$$(q) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$$

$$(r) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 5x)^{\frac{1}{8x}}$$

$$(s) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(\frac{3x+1}{3x-5} \right)^{2-x} \right]$$

$$(t) \lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln(x+3) - \ln x]$$

$$(u) \lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln x - \ln(x+2)]$$

7. Calcule os seguintes limites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(3x + \sin x)}{2x^2 - 5x \sin x + 1}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - \sin(x^2)}{2x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 5x^2}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \cos x + 3\sqrt{x}}{x + \sin x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{\sin x}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + \cos x)^{\cot^2 x}$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$$

8. Analise a continuidade das seguintes funções e classifique os pontos de descontinuidade, se necessário:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6} & \text{(c)} \quad f(x) = \frac{x+2}{x^2+2x-3} & \text{(e)} \quad f(x) = \frac{1+x^3}{1+x} \\
 \text{(b)} \quad f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-6} & \text{(d)} \quad f(x) = \frac{x}{x^2+1} & \text{(f)} \quad f(x) = \frac{x^2-4}{x^3-2x^2+x-2}
 \end{array}$$

9. Verifique se as seguintes funções são contínuas nos pontos indicados:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{se } x > 2 \\ 3, & \text{se } x = 2 \\ \frac{x^2-x-2}{x-2}, & \text{se } x < 2 \end{cases} & \text{(b)} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+x-1}{x+1}, & \text{se } x > -1 \\ 2, & \text{se } x = -1 \\ \frac{6x+6}{x^2-1}, & \text{se } x < -1 \end{cases}
 \end{array}$$

10. Para quais valores de k e m as funções são contínuas em \mathbb{R} ?

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad f(x) = \begin{cases} x^2-k^2, & \text{se } x < 4 \\ kx+20, & \text{se } x \geq 4 \end{cases} & \text{(d)} \quad f(x) = \begin{cases} 2kx+1, & \text{se } x > -1 \\ 7-kx, & \text{se } x = -1 \\ k-7x, & \text{se } x < -1 \end{cases} \\
 \text{(b)} \quad f(x) = \begin{cases} x^2-k, & \text{se } x > 2 \\ 7, & \text{se } x = 2 \\ k^2-x, & \text{se } x < 2 \end{cases} & \text{(e)} \quad f(x) = \begin{cases} 1-4x^2, & \text{se } x < -1 \\ kx-m, & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 7-x, & \text{se } x > 1 \end{cases} . \\
 \text{(c)} \quad f(x) = \begin{cases} x^2+2kx+k^2, & \text{se } x > -2 \\ 1-x^3, & \text{se } x = -2 \\ 4+k, & \text{se } x < -2 \end{cases} & \text{(f)} \quad f(x) = \begin{cases} 7x-2, & \text{se } x \leq 1 \\ kx^2, & \text{se } x > 1 \end{cases}
 \end{array}$$

$$11. \text{ Considere a família de funções } g, \text{ definidas por: } g(x) = \begin{cases} \frac{ax}{4}, & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{1}{4(\sqrt{2x}-\sqrt{x-1})}, & \text{se } 1 < x \leq 2, a \in \mathbb{R} \\ \frac{x^2-x-2}{3x^2-12}, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

(a) Determine a de modo que $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ exista.

(b) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

(c) Mostre que g é contínua para $x = 2$.

12. Moçambique taxa em 15% a renda mensal entre MZN 1.313,70 e MZN 2.625,12 e em 27,5% a renda acima deste valor, sendo isenta a parcela inferior ou igual a MZN 1.313,69.

(a) Determine uma função que represente o imposto pago sobre uma renda qualquer.

(b) Verifique se esta função é contínua, ou seja, se a transição entre uma faixa e outra se dá de modo contínuo, minimizando injustiças.

13. Suponha que a temperatura é T ($^{\circ}\text{F}$) e que a velocidade do vento é v (milhas/h). Neste caso, a temperatura corrigida é dada pela função

$$W(v) = \begin{cases} T, & \text{se } 0 \leq v \leq 4 \\ 91,4 + (91,4 - T)(0,0203v - 0,304\sqrt{v} - 0,474) & \text{se } 4 < v < 45 \\ 1,6T - 55, & \text{se } v \geq 45 \end{cases}$$

(a) Suponha que $T = 30$ $^{\circ}\text{F}$. Qual é a temperatura corrigida quando $v = 20$ milhas/h? E quando $v = 50$ milhas/h?

(b) Para $T = 30$ $^{\circ}\text{F}$, que velocidade do vento corresponde a uma temperatura corrigida de 0 $^{\circ}\text{F}$?

(c) A função W é contínua em seu domínio?